

MATEMATICĂ

clasa a IX-a

**BREVIAR TEORETIC. EXERCIIII ȘI PROBLEME
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE.
TESTE SUMATIVE**

- filiera teoretică ■ profilul real
- specializarea științe ale naturii
- filiera tehnologică

Consultant:

Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ



NICULESCU

Capitolul I. Mulțimi și elemente de logică matematică	8
1. Numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real. Operații cu numere reale. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	8
2. Operații cu intervale de numere reale. Aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	14
3. Propoziții logice, operații cu propoziții, predicate, cuantificatorul existențial și universal	21
4. Relații și operații cu mulțimi corelate cu elemente de logică. Probleme de numărare	28
5. Metoda inducției matematice	31
Capitolul II. Funcții	36
1. Noțiunea de șir; modalități de a defini un șir; șiruri mărginite, șiruri monotone	36
2. Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice	43
3. Reper cartezian. Drepte în plan de forma $x = m$ și $y = m$, $m \in \mathbb{R}$. Reprezentare grafică	52
4. Definiție, modalități de a descrie o funcție. Graficul unei funcții. Imaginea și preimagea unei mulțimi printr-o funcție. Egalitatea a două funcții, restricții ale unei funcții, lecturi grafice	56
5. Funcții numerice. Proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lecturi grafice, paritate, imparitate, simetrie	63
6. Periodicitatea și monotonia funcțiilor. Rezolvări grafice de ecuații și inecuații de forma $f(x) = g(x)$, $(\leq, >, <, \geq)$. Funcții mărginite	68
7. Compunerea funcțiilor	73
8. Funcția de gradul întâi. Definiție, intersecția graficului cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$	79
9. Monotonia și semnul funcției de gradul întâi. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($\geq, <, >$)	85
10. Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute și sisteme de inecuații liniare cu o necunoscută	89
11. Funcția de gradul al doilea	95
12. Relațiile lui Viète; rezolvarea sistemelor simetrice	102
13. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea. Monotonia	109
14. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă; poziția relativă a două parabole; sisteme	116

Capitolul I. Calcul vectorial.....	124
1. Segmente orientate, vectori legați, vectori. Adunarea vectorilor	124
2. Înmulțirea vectorilor cu scalari. Vectori coliniari	131
3. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari și nenuli. Descompunerea unui vector într-un reper cartezian. Versorul unui vector	137
4. Teoremele lui Thales, Menelaus, Ceva, Sylvester și a bisectoarei	144

Capitolul II. Elemente de trigonometrie	150
1. Unghiuri și arce. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic (sin, cos, tg, ctg).....	150
2. Definirea funcțiilor trigonometrice. Semnul și monotonia lor.....	156
3. Paritate, periodicitate. Reducerea la primul cadran. Funcțiile trigonometrice ale sumei sau diferenței de unghiuri.....	162
4. Formule trigonometrice ale arcului dublu și ale jumătății de arc	169
5. Formule pentru transformarea sumelor și diferențelor în produse	173
6. Produsul scalar a doi vectori. Teorema cosinusului. Condiții de perpendicularitate	178

Capitolul III. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	185
1. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie	185
2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic și a triunghiului oarecare.....	190

Teste sumative

Teste 1–10	197
-------------------------	------------

Răspunsuri

Algebră	214
Geometrie	259
Teste sumative.....	283

MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real. Operații cu numere reale. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

IMPORTANT!

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (se notează $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale!)

- între două numere reale diferite $x < y$ există cel puțin un număr rațional r și cel puțin un număr irațional α : $x < r < y$ și $x < \alpha < y$;
- oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y , există un număr natural n astfel ca $nx > y$ (axioma lui Arhimede);
- modulul $|x|$ al unui număr x se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \max(x, -x).$$

Proprietățile modulului

- 1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 2) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 3) $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 4) $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- 6) $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- 7) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*.$
- 8) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x = -y.$

Fie $a > 0$. Atunci:

- 9) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ sau } x = -a.$
- 10) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a].$
- 11) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty).$

Modele pentru rezolvarea problemelor și redactarea soluțiilor

1. Să se calculeze: $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2025}}$.

Soluție:

Prin amplificarea fiecărui termen cu „conjugatul” numitorului obținem:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\sqrt{3}}{-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2} + \dots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2025}}{-2} = \\ & = -\frac{1}{2} \cdot (1-\sqrt{3} + \sqrt{3}-\sqrt{5} + \sqrt{5}-\sqrt{7} + \dots + \sqrt{2023}-\sqrt{2025}) = \frac{1}{2} \cdot (1-45) = \\ & = -\frac{1}{2} \cdot (-44) = 22. \end{aligned}$$

2. Demonstrați că oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$|3x + 4y - 5| + |-2x + y + 2| + |x + 5y - 8| \geq 5.$$

Soluție:

Știm că $|x| \geq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $|x| = |-x|$.

$$\begin{aligned} \text{Astfel obținem: } & |3x + 4y - 5| \geq 3x + 4y - 5; \quad |-2x + y + 2| \geq -2x + y + 2; \\ & |x + 5y - 8| = |-x - 5y + 8| \geq -x - 5y + 8. \end{aligned}$$

Prin adunarea relațiilor obținem:

$$|3x + 4y - 5| + |-2x + y + 2| + |x + 5y - 8| \geq (3x + 4y - 5) + (-2x + y + 2) + (-x - 5y + 8) = 5.$$

3. Demonstrați că $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in [1, 2]$

Soluție:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| = \sqrt{x-1}+1.$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1| = -\sqrt{x-1}+1.$$

$$\text{Așadar: } \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2 \in \mathbb{N}.$$

Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Să se calculeze:

a) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2015 - 2016 + 2017$;

b) $\left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} + \dots + \frac{1}{2020} \right) + \left(\frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \dots + \frac{2019}{2020} \right)$;

c) $\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{24} - \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{5} \right) : (-4)$;

$$d) \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} \right) : \left(-\frac{6}{7} \right).$$

2. Calculați:

a) $3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{6};$

b) $-2\sqrt{5} + (-6\sqrt{5}) - (-3\sqrt{5});$

c) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3}.$

3. Calculați:

a) $\sqrt{7} + 3\frac{1}{2} - 2\sqrt{7} + 0,5 + (-\sqrt{7}) - \frac{3}{2};$

b) $(-7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{3};$

c) $\sqrt{5}(4\sqrt{6} : 2\sqrt{3} - \sqrt{8} + 3\sqrt{2}).$

4. Fie numerele: $a = \frac{1}{2} : \sqrt{0,25} - \frac{\sqrt{192}}{6} + \frac{\sqrt{27}}{9}$ și $b = 1,4 \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}.$

Arătați că $|a| - |b|$ este un număr întreg.

5. Fie numerele $a = 2\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$ și $b = \sqrt{75} + \sqrt{125}.$

Calculați: $a + b, a - b, ab, 2(a + b) - ab.$

6. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor

$a = 2\sqrt{3} - 1$ și $b = 2\sqrt{3} + 1.$

7. Să se arate că $a = \left[5\sqrt{3} - \sqrt{108} + \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right)^{-1} + \left| \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right| \right] (1 + \sqrt{3})$ este un număr întreg.

8. Determinați x din egalitatea: $\frac{x+3}{5\sqrt{3}-3} = \frac{5\sqrt{3}+3}{6}.$

9. Calculați: a) $(\sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{-1};$ b) $\frac{30}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + 2(\sqrt{2})^{-1}.$

10. Comparați numerele:

a) $\sqrt{5}$ și $\frac{6}{\sqrt{5}};$

b) $\frac{3\sqrt{48}}{2}$ și $\frac{9}{\sqrt{3}};$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ și $\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}.$

11. Arătați că $a = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{2}{\sqrt{7}} \in \mathbb{N}.$

12. Calculați: $\left(\frac{14}{2-\sqrt{11}} + \frac{5}{4+\sqrt{11}}\right) : \frac{1}{\sqrt{11}}.$

13. Aflați x din egalitatea $\frac{4\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}}.$

14. Calculați: a) $(x-3)(x^2+3x+9)$; b) $(x-1)(x+4)$; c) $(x-1)(x^2+x+1).$

15. Calculați: a) $\left(\sqrt{3+\sqrt{7}} - \sqrt{3-\sqrt{7}}\right)^2$; b) $\sqrt{6\sqrt{6} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}}}.$

16. Calculați: a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)^2$; b) $(\sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{5})^2.$

17. Stabiliți dacă $\left(\frac{x+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = ax$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}.$

18. Simplificați rapoartele:

a) $\frac{x^3-1}{x^3+x^2+x}$; b) $\frac{x^3-2x}{x^4-4x^2+4}$; c) $\frac{5x^2+5x}{3x^3+6x^2+3x}.$

19. Rezolvați ecuațiile:

a) $|2x-1|=7$; b) $|3x+2|=|2-x|$; c) $|x-1|+|x-5|=1.$

20. Rezolvați inecuațiile: a) $|2x-1|<3$; b) $|2x-1|<|3x+2|.$

21. Pentru $a > 0$ și $b < 0$, să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$

Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Efectuați:

a) $\frac{x}{2x+1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3x+1}{4x^2-1}$; b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+3} - \frac{2x^2+x}{x^2+x-6}.$

2. Simplificați rapoartele:

a) $\frac{x^2+6x+9-y^2}{7x+7y+21}$; b) $\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^4+4x^3+3x^2}$; c) $\frac{(x^2-x)(x^2-x+4)+4}{(x^2-x)(x^2-x+1)-2}.$

3. Descompuneți în factori:

a) $3x^2(x-5)+(5-x) \cdot (x^2+1)$; b) $(2x+1)^2 - (2x+1)(x-3) + (2x+1) \cdot 4x.$

4. Descompuneți în factori:

a) $(x^2+5x)(x^2+5x-2)-3$; b) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+7)+9.$

5. Fie $a \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că numărul $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ este pătrat perfect.

6. Calculați media geometrică a numerelor: